$y''=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ or $x\in]0,1] \Rightarrow x\le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}\ge 1$ et $1+\sqrt{1-x^2}\ge 1$

donc $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\ge 1$ et par suite la solution y'' est à rejeter car $y\in[0,1]$.

Conclusion : $g^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & si\ x\in]0,1]\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

c) • g est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x\in[0,1]$, $g'(x)\neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $g([0,1])=[0,1]$.

• Pour $x\in]0,1]$, on a $g^{-1}(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ donc :

$$(g^{-1})'(x)=\frac{-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x-1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

• Pour $x=0$ on a : $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'[g^{-1}(0)]}=\dfrac{1}{g'(0)}$ or $g'(0)=2$

d'où $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $(g^{-1})'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}} & si\ x\in]0,2]\\ \dfrac{1}{2} & si\ x=0\end{cases}$

Solution 5 :

1°/• La fonction $x\mapsto x^2+8$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2+8>0$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+8}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

• La fonction $x\mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de ces deux fonctions dérivables.

• $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}=-\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$.